

# 5

Sergio Rubio-Pizzorno  
Gisela Montiel Espinosa

## ECOSISTEMAS EDUCATIVOS HÍBRIDOS EN LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.271-312

## INTRODUCCIÓN

Es innegable que la tecnología digital ha provocado grandes cambios, o una verdadera revolución, en diferentes ámbitos de la vida personal, laboral y social. Castells (1999) comienza su libro *La Era de la Información* declarando que la revolución de la tecnología de la información<sup>40</sup> ha penetrado todo ámbito de la actividad humana, para luego añadir que esta revolución “está modificando la base material de la sociedad a un ritmo acelerado” (CASTELLS, 1999, p. 27). Por su parte, Serres (2013) sitúa la revolución de las nuevas tecnologías como una de las tres revoluciones principales en la historia de la humanidad, luego de la creación de la escritura y la invención de la imprenta, y reconoce que esta tercera revolución cambió, entre otros, la manera en que se articula la sociedad y cómo se entiende la educación. Cobo y Moravec (2011) caracterizan el cambio social a raíz de esta revolución, describiendo la transición entre paradigmas sociales, desde lo que ellos denominan la sociedad 1.0, 2.0 y 3.0:

La sociedad 1.0 refleja las normas y prácticas que prevalecieron desde la sociedad preindustrial hasta la sociedad industrial. Por su parte, la sociedad 2.0 hace referencia a las enormes transformaciones sociales que están teniendo lugar en la sociedad actual y que encuentran su origen, principalmente en el cambio tecnológico. Por último, la sociedad 3.0 alude a la sociedad de nuestro futuro más inmediato, para la que se pronostican enormes transformaciones producto del cambio tecnológico acelerado (COBO; MORAVEC, 2011, p. 48).

Es decir, antes de la aparición de la tecnología digital en el panorama humano, la sociedad se caracterizaba por desarrollarse

40 En la literatura se emplean diferentes términos para referirse a un mismo objeto, fenómeno o era, según sea el énfasis de cada autora o autor. En este caso Castells (1999) habla de las *tecnologías de la información*, Serres (2013) de las *nuevas tecnologías*, Cobo y Moravec (2011) usan las siglas TIC haciendo alusión a las *tecnologías de información y comunicación*. En este capítulo se emplea el término *tecnología digital*, para referirse a todas ellas de manera global.

en una materialidad análoga, por un orden jerárquico, una relación mecánica entre diferentes ubicaciones geográficas y una visión del mundo determinista. Luego de su aparición, el paradigma social tiene un giro hacia una materialidad digital, hacia las relaciones heterárquicas de poder entre las personas -horizontales y multidireccionales, a una relación holográfica entre distintas partes y una visión indeterminada del mundo. En la actualidad vivimos en transición entre la sociedad 2.0 y la 3.0, la cual se desarrolla en una materialidad más allá de lo físico y lo digital, es decir, constituida por espacios de diversas naturalezas, el orden entre los sujetos es intencionado o autoorganizado, las relaciones entre diferentes partes son sinérgicas y la visión del mundo es diseñada.

## LO OFICIAL Y LO NO OFICIAL

Es posible reconocer que la aparición de la tecnología digital no sólo provocó un cambio material, sino también uno a nivel social, al reconocer que la tecnología es una construcción de nuestras sociedades y mantiene una relación mutuamente constitutiva con ellas. No obstante, este cambio social no se produjo de manera uniforme y estandarizado, por el contrario, se dio de forma heterogénea y diversa según el grado de poder de los grupos sociales.

Rubio-Pizzorno (2018) realiza una distinción respecto a este cambio social distinguiendo dos ámbitos, el *oficial* y el *no oficial*, donde lo oficial lo identifica como “las instituciones, centros de enseñanza u otras instancias, que ejercen cierta autoridad sobre los miembros o conjunto de la sociedad, la nación, el Estado o entidades territoriales” (RUBIO-PIZZORNO, 2018, p. 3), y lo no oficial lo relaciona a la proliferación y expansión de Internet como herramienta emancipadora, que debido a sus características le ha permitido convertirse en:

Una instancia de democratización social y apertura a la libre disponibilidad de la información, [...] motivados por la posibilidad que este ámbito les brinda a las personas de incidir en cambios locales, personales y colectivos, con efectos y resultados instantáneos o a corto plazo (RUBIO-PIZZORNO, 2018, p. 3).

De esta manera, se establece una distinción entre lo oficial como las instituciones dominantes en nuestras sociedades, y lo no oficial como las organizaciones preocupadas de las reales necesidades de las personas y sus comunidades.

Sumado a esta distinción, Stacey y Hinchliff Pearson (2017) hablan de la manera en que históricamente se han administrado los recursos y compartido las riquezas, la cual se ha realizado por tres entes: los comunes<sup>41</sup>, el Estado y el mercado. Los comunes se refieren a los bienes y recursos administrados y gestionados de forma colectiva, o como propone Rowe (2013, p. 14):

Los comunes incluyen todo nuestro sistema de soporte vital, tanto natural como social. El aire y los océanos, la red de especies, la naturaleza salvaje y la corriente de agua -todas son partes de lo común. También lo son el idioma y el conocimiento, las aceras y las plazas públicas, las historias infantiles y los procesos democráticos. Algunas porciones de los comunes son regalos de la naturaleza, otras son producto del esfuerzo humano. Algunas son nuevas, como Internet; otras son antiguas como la tierra y la caligrafía.

Con base en los aportes de Rubio-Pizzorno (2018) y de Stacey y Hinchliff Pearson (2017), en el presente capítulo se considera al ámbito *oficial* como lo representado por el Estado y el mercado, preocupados por atender las necesidades institucionales y

41 *Los comunes* es el término que se consensuó para referirse a *the commons*, en la traducción al español del libro *Made With Creative Commons* de Stacey y Hinchliff Pearson (2017). Para revisar la reflexión sobre las diferentes traducciones e interpretaciones al español del término *the commons*, se recomienda revisar el apartado *La traducción de The Commons* en Stacey y Hinchliff Pearson (2019, p. 17), cuya versión en pdf está disponible de manera abierta en [http://ru.iiec.unam.mx/4749/12/hecho\\_con\\_cc.pdf](http://ru.iiec.unam.mx/4749/12/hecho_con_cc.pdf).

corporativas, y que además actualmente son las formas dominantes en nuestras sociedades, incluso siendo a veces difícil determinar los límites entre uno y otro. Por su parte, lo *no oficial* se refiere al ámbito representado por *los comunes*, relacionado con la posibilidad que tienen las personas y sus comunidades de materializar las soluciones a sus problemáticas, donde el uso y desarrollo de tecnología digital y abierta tiene un rol fundamental.

Como ejemplo de esta distinción, la lectora o el lector puede pensar en las comunidades de hackers<sup>42</sup> como grupos sociales que se organizan de manera no oficial, y en las corporaciones tecnológicas que realizan desarrollos principalmente de manera privativa y privada, como organizaciones oficiales. Es importante señalar que, si bien ambos ámbitos producen tecnología digital, estas se diferencian en su propósito y manera de ser desarrolladas: unas de manera abierta y otras de manera cerrada.

Para ilustrar la diferencia entre el software libre y el privativo como construcciones del ámbito no oficial y oficial respectivamente, en tanto tecnología y su producción, se puede recurrir a la metáfora de un plato de comida y su receta:

El software privativo permite comernos el plato ya cocinado pero nos está prohibido conocer los ingredientes y sus cantidades para cocinarlo en nuestra casa. El software libre tiene a disposición de todo el mundo la receta (código fuente). Así, cualquiera puede replicar la receta o la puede modificar incorporando nuevos ingredientes propios de una región para darle un nuevo sabor y luego compartir esa nueva receta con el mundo entero (GARCÍA GAGO *et al.*, 2020).

<sup>42</sup> Para más información sobre la comunidad de hackers, su funcionamiento, propósitos, ética y diferencia de los piratas informáticos o los criminales cibernéticos, se recomienda revisar los textos *Ética Hacker, Seguridad Y Vigilancia* de Soria Guzmán (2016) y *Me llamo Kohlam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica* de Contreras (2003).



En educación matemática existen ejemplos de estos tipos de software, como lo son Cabri y GeoGebra, siendo el primero un software privativo, desarrollado por un número limitado de personas (CABRI, 2017), y el segundo un software libre, lo que implica que es una comunidad abierta la que desarrolla el software<sup>43</sup> y no existe ningún cobro monetario por su uso (RUBIO-PIZZORNO, 2020).

## CAMBIOS PROVOCADOS POR LA REVOLUCIÓN DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL

Luego de reconocer que los cambios tecnológicos tienen su impacto en la sociedad, y que estos se dan de manera diferente en los ámbitos oficial y no oficial, es importante ubicar qué tipo de cambios se han provocado por la revolución de la tecnología digital en tales ámbitos.

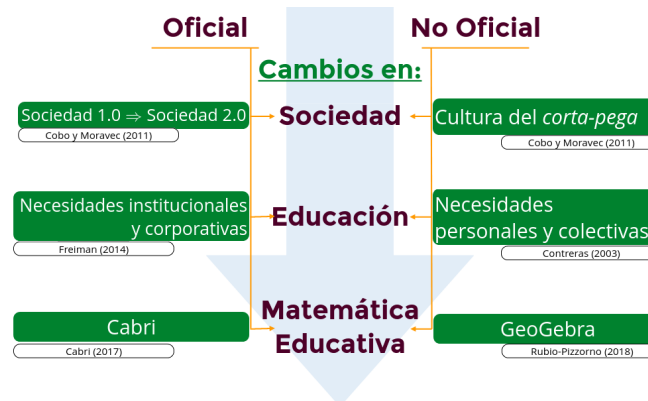
En términos oficiales, ya se ha mencionado el cambio de paradigma de la sociedad 1.0 a la 2.0 a nivel educativo, Freiman (2014) identifica que, en su mayoría, los organismos oficiales se preocuparon de incorporar la tecnología teniendo en cuenta sus necesidades institucionales, por sobre atender a las necesidades educativas de las personas. Por otra parte, en términos del ámbito no oficial, en un nivel social se reconoce la emergencia del paradigma cultural del *corta-pega*, aludiendo a “la característica de remezclar y reutilizar información ya existente, para dar lugar a significados tan exclusivos y personales como los de las obras originales en las que se basaron” (COBO; MORAVEC, 2011, p. 51). A nivel educativo, existe un movimiento espontáneo, donde las personas buscan atender sus

<sup>43</sup> La lectora o el lector puede profundizar en las características del software libre GeoGebra y sus implicaciones sociales en la sección 2.1.3.3. *Construcción social de GeoGebra* de Rubio-Pizzorno (2018, pp. 53 - 65).

necesidades educativas personales y colectivas, usando la tecnología digital y sin necesidad de pasar por un filtro oficial (CONTRERAS, 2003). Por ejemplo, se tiene el desarrollo del software libre GeoGebra y todos los recursos educativos abiertos que se construyen y comparten en su repositorio<sup>44</sup>, los cuales son creados y compartidos de manera abierta por los miembros de la comunidad; o el movimiento de los EduTubers, quienes son personas que crean contenido educativo en formato video, los cuales comparten de manera gratuita en YouTube<sup>45</sup>.

De manera evidente se puede reconocer una diferencia en los efectos de la revolución de la tecnología digital en los ámbitos oficial y no oficial (ver Figura 1), donde en el primero existe una preocupación por el beneficio económico y las necesidades institucionales y corporativas, mientras que en el segundo se desenvuelve de manera comunitaria y abierta, con una marcada tendencia colectiva y colaborativa que permea a todo este ámbito.

**Figura 1 - Cambios producto de revolución de la tecnología digital en los ámbitos oficial y no oficial**



Fuente: Imagen adaptada de Rubio-Pizzorno (2018, p. 4).

44 Visitar el repositorio de GeoGebra titulado *Recursos para el aula* en [geogebra.org/materials](https://www.geogebra.org/materials).

45 Para saber más información del movimiento de los EduTubers, se recomienda escuchar el episodio 8 del podcast *Aula Abierta* dedicado a los EduTubers: <https://open.spotify.com/episode/6kToPSL8texSQRBHcn98jR>

Dado los intereses de los autores del presente capítulo, se siguió focalizando la investigación hacia los efectos de la revolución de la tecnología digital en la Matemática Educativa, especialmente en la posibilidad de indagar la manera en que los aspectos sociales, culturales, colectivos y colaborativos inciden en el fenómeno de aprender y enseñar matemáticas. De esta manera y con base en lo expuesto en esta sección, se proponen las siguientes preguntas para guiar la configuración del marco teórico de este capítulo:

1. ¿Cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital?
2. ¿Qué matemáticas y cómo se aprenden éstas en la era digital?

En las siguientes secciones se desarrollan las ideas que permiten abordar estas preguntas.

## PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA - METODOLOGÍA

La pregunta sobre *¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento aprovechando la tecnología digital?*, conlleva de manera implícita la identificación de un objeto de estudio que trasciende a la Matemática Educativa. Este objeto se relaciona directamente con aspectos de organización social y construcción de conocimiento usando tecnología digital, por lo que fue necesario acudir a explicaciones de disciplinas como la sociología y la antropología, para luego articularlas con aspectos de la matemática educativa que permitieran abordar el fenómeno de manera más robusta, con el propósito de responder a un escenario más cercano a la realidad y menos artificial en términos educativos.



Para desarrollar esta articulación de diferentes disciplinas y organizar sus aportes, nos basamos en la propuesta sobre *producción de conocimiento en matemática educativa* de Lerman (2000), donde emplea la idea de *recontextualización* (BERNSTEIN, 1996 citado en LERMAN, 2000), referida al proceso de adopción de marcos teóricos dentro de un campo. Este proceso se da en el movimiento y adaptación de ideas entre los siguientes niveles de conocimiento:

- **Nivel 1:** Disciplinas circundantes o que sirven de fundamento para la matemática educativa, tales como la psicología, la sociología, la filosofía, la antropología y las matemáticas.
- **Nivel 2:** Matemática educativa y otras áreas curriculares de la investigación educativa.
- **Nivel 3:** Currículo y prácticas de clase.

En cuanto a la producción de conocimiento en matemática educativa, Lerman (2000, p. 20) enfatiza que el segundo nivel de conocimiento “se relaciona de una manera más horizontal con los dominios del primer nivel, más que tener una relación jerárquica con ellos”. De esta manera, se reconoce la capacidad de la matemática educativa para producir conocimiento de manera autónoma, y no sólo como una recontextualización de otras disciplinas.

De esta manera, reconocemos que la construcción de conocimiento se puede dar de ambas formas (autónoma y como recontextualización). Y con base en los intereses de los autores y el fenómeno a atender en este capítulo, las disciplinas que sirven de fundamento en este escrito corresponden a la antropología, la sociología y la investigación educativa.

## LA TECNOLOGÍA COMO PARTE DE LA SOCIEDAD: ANTROPOLOGÍA

Para estudiar los aspectos de organización social y construcción de conocimiento usando tecnología digital, recurrimos a las explicaciones teóricas de la antropología social, que tiene a la relación entre la cultura y la tecnología como uno de sus objetos de estudios. Al respecto, es posible dar cuenta de un cambio en la manera de estudiar el vínculo cultura-tecnología por la antropología (SANTOS; DÍAZ CRUZ, 2015), de donde se pueden diferenciar dos paradigmas generales de investigación:

- **Paradigma tradicional:** Las investigaciones se centran fundamentalmente en el estudio de la tecnología o el cambio tecnológico en las sociedades tradicionales, incurriendo en el reduccionismo de considerar a la tecnología simplemente como un fenómeno de la cultura material de las sociedades. En términos más simples, estas investigaciones consideran a la tecnología como un periférico, que podría estar o no, que se podría poner o quitar de la sociedad sin mayor problema.
- **Paradigma moderno:** Las investigaciones analizan a la tecnología como una construcción social, cultural y simbólica en nuestras sociedades modernas y complejas. Esto con el propósito de ser sensibles a la realidad, si consideramos que “nuestra vida cotidiana es impensable hoy sin el enorme conjunto de artefactos técnicos que nos rodean” (SANTOS; DÍAZ CRUZ, 2015, p. 10). De esta manera, se considera a la tecnología como un elemento propio y constitutivo de la sociedad, con lo cual se pasa de considerar una *sociedad con tecnología* a una *sociedad tecnologizada*.

En este escrito nos posicionamos en el paradigma moderno de investigación antropológica para fundamentar el estudio. De esta manera, se está en condiciones de reconocer a la tecnología como parte del “tejido sin costuras de la sociedad, la política y la economía. [O dicho de otra manera], el desarrollo de un artefacto tecnológico [...] no es simplemente un logro técnico; inmerso en él se encuentran las consideraciones sociales, políticas y económicas” (PINCH, 2015, p. 25).

De aquí también se desprende una investigación sobre las comunidades abiertas construyendo conocimientos de diversos tipos, desde la perspectiva de la construcción social de la tecnología digital<sup>46</sup>.

## ESTRUCTURA SOCIAL EN RED Y SU SOPORTE MATERIAL HÍBRIDO: SOCIOLOGÍA

Si bien el aporte de la antropología permite situar el presente estudio, es necesario precisar más respecto de lo digital. Esto se debe a que ambos paradigmas de investigación antropológica se refieren a la tecnología de manera general, sin considerar las particularidades de la tecnología digital y la influencia que podría tener en la sociedad, la cual *a priori* se puede considerar como diferente de lo que podría provocar la relación con tecnologías no digitales o análogas.

Dada esta situación, Castells (1999) se presenta como un referente general para entender los cambios sociales provocados por la aparición de la tecnología digital en el panorama humano. Uno de los cambios sociales más importantes reportados por Castells (1999) es el posicionamiento de la *sociedad red* como estructura social predominante en nuestras sociedades, o dicho de otra forma,

<sup>46</sup> Para más información al respecto se recomienda revisar la sección 2.1 Organización social propiciada por la tecnología digital de la tesis de Rubio-Pizzorno (2018, pp. 18 – 66).

“aunque la forma en red de la organización social ha existido en otros tiempos y espacios, el nuevo paradigma de la tecnología [digital] [...] proporciona la base material para que su expansión cale toda la estructura social” (CASTELLS, 1999, p. 506).

Específicamente esta base material de la sociedad red es una hibridación armónica -y en algunos casos transparente- entre lo físico y lo digital. Según Castells (1999), lo físico entendido como un espacio social clásico o *espacio de lugares*, y lo digital como un espacio social provisto por la tecnología digital o *espacio de flujos*. A modo de ejemplo revisemos el caso del Coloquio GeoGebra, organizado por la Comunidad GeoGebra Latinoamericana (RUBIO-PIZZORNO, 2020). En este evento se transmite a toda Latinoamérica y el mundo a través de una videollamada o transmisión abierta, donde un conferencista latinoamericano realiza una presentación sobre algún tema educativo, docente, investigativo o matemático usando GeoGebra. De parte del equipo de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana, se cuenta con un moderador(a) quien se encarga de la presentación del conferencista y la gestión de las preguntas del público; y el presentador quien gestiona la sesión en general y da avisos de interés para la comunidad. Cabe destacar que todas las personas que participan del evento se encuentran en diferentes lugares físicos.

Por ejemplo, en la sesión 6 del Coloquio GeoGebra, titulada *Construindo cenários animados no GeoGebra para o ensino e a aprendizagem de funções* (BASNIAK, 2020), se llevó a cabo con el presentador en Ciudad de México, la moderadora en Lima (Perú), la conferencista en Paraná (Brasil) y los asistentes estaban conectados desde diferentes países de Latinoamérica, quienes estaban físicamente en lugares sociales clásicos -biblioteca, oficina, casa- (COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA, 2019).

Si el Coloquio GeoGebra contara únicamente con un soporte material físico para la actividad académica (sin computador, sin Internet,

etc.), la actividad no podría llevarse a cabo. En cambio, al contar con ambientes y tecnología digital que permiten la comunicación sin barreras geográficas, el evento tiene posibilidades de existir y funcionar, ya que el flujo académico natural de esta actividad se da en una simultaneidad de espacios físicos y digitales, es decir, en un soporte material híbrido.

## AMPLIACIÓN DE LOS ESPACIOS DE APRENDIZAJE: INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Si consideramos a la educación como una manifestación social, entonces es natural pensar que los cambios en la estructura social provocados por la interacción con la tecnología digital también han influido en la configuración de los espacios educativos. De esta manera, podemos preguntarnos ¿cómo se manifiesta la estructura social en red y su materialidad híbrida en la educación?

Al respecto, Cobo y Moravec (2011) reconocen que gracias a la tecnología digital podemos acceder a contenidos educativos de manera continua y sin restricción de espacios:

Uno de los principales aportes de la adopción de las tecnologías [digitales] [...] en la vida cotidiana es que ello ha permitido ampliar los límites preestablecidos de lo que tradicionalmente se conocía como espacios de aprendizaje. En otras palabras, la domesticación (e invisibilización) de las tecnologías está abriendo nuevas posibilidades para convertir otros espacios en laboratorios de aprendizaje.

El valor de esta mirada no está en el “qué” se aprende, sino en “cómo”, “dónde” y “cuándo” [...]. Esto no significa que el “qué” no sea importante, todo lo contrario, pero también es preciso comprender que las tecnologías digitales han permitido ampliar las dimensiones temporales y espaciales del proceso de aprendizaje. Visto desde una perspectiva cartográfica, podríamos plantear que se amplía el mapa de la ecología del



aprendizaje. En este nuevo plano, el aprendizaje trasciende los espacios tradicionalmente delimitados para aprender. Tal como hemos señalado, el nuevo panorama del aprendizaje ha de ser en 3D y 360°, incluyendo otros territorios hasta ahora ignorados (COBO; MORAVEC, 2011, p. 111).

Este último punto, sobre la posibilidad de estar ignorando otros territorios no explorados, motiva preguntarse ¿qué otro espacio existe además del físico y digital? Para responderla podemos ver el ejemplo de un juego mundialmente conocido: *Pokémon Go*®<sup>47</sup>. Este juego consiste básicamente en la posibilidad de atrapar pokémones con tu teléfono al recorrer espacios físicos, es decir, al tener abierto el juego en el teléfono, con la cámara se puede explorar el espacio físico y a través de la pantalla se pueden ver los pokémones que van apareciendo, los cuales se puede capturar. En términos que ya hemos utilizado en este escrito, podemos decir que *Pokémon Go* permite explorar el espacio físico a través de un dispositivo móvil para encontrar objetos digitales en el espacio físico. En la Imagen 2 se puede observar a algunos pokémones sobre el césped, al lado de un árbol, o cómo una abuelita tiene uno de estos bichos digitales entre sus manos.

**Figura 2 - Vista de Realidad aumentada de Pokémon Go**



Fuente: Imágenes tomadas del juego Pokémon Go®.

47 Más información de este juego en su sitio web: [www.pokemongo.com](http://www.pokemongo.com).

¿Podríamos decir que tales objetos digitales están en la realidad física, o que la realidad física está incorporándose a la realidad digital? En realidad, podemos decir que las dos opciones tienen algo de certeza, ya que este tipo de interacción “nos da la posibilidad de sobreponer una realidad sobre otra a través de un dispositivo que tenga una pantalla y una cámara. Son dos realidades yuxtapuestas, una encima de la otra” (CCD Radio, s.f.). Por esta razón, a este tipo de espacio se le denomina *realidad aumentada*.

Al igual que la realidad aumentada, es posible encontrar espacios de distinta naturaleza que han comenzado a configurar el soporte material de nuestra sociedad. Por mencionar algunos ejemplos, a los espacios físico y digital se suman la realidad aumentada, el video 360, la realidad virtual, la realidad mixta (ver Figura 3) y la realidad cinemática.

**Figura 3 - Relación de espacios respecto de la interactividad (izquierda) y movimiento (derecha)**



Fuente: Centro de Cultura Digital (2018).

Por lo tanto, no son sólo los lugares físicos y digitales los que configuran nuevos espacios de aprendizaje, sino que hay espacios de otras naturalezas que son susceptibles de ser usados con fines educativos.

## ECOSISTEMAS EDUCATIVOS HÍBRIDOS

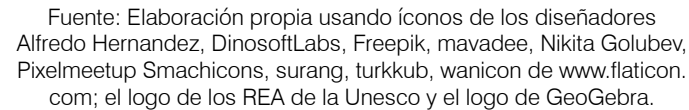
La primera pregunta planteada al comienzo de este capítulo se cuestiona ¿cómo se organiza la sociedad para construir conocimiento

aprovechando la tecnología digital? Para abordar la pregunta se comenzó explorando los aportes de la antropología, a partir de los cuales se reconoce la posibilidad de estudiar e investigar a la tecnología como una construcción social. La sociología nos permitió reconocer que la tecnología digital está ampliando la materialidad social, desde una exclusivamente física a una hibridación entre lo físico y lo digital. Por su parte, la investigación educativa nos ayudó a reconocer la existencia otros espacios susceptibles de ser usados con fines educativos, como la realidad aumentada, la realidad mixta, entre otros. Todos estos espacios se suman al clásico espacio físico y al espacio digital para configurar -aludiendo a la metáfora cartográfica de Cobo y Moravec (2011)- nuevos territorios de aprendizaje o, dicho de una manera más económica, configuran nuevos *Ecosistemas Educativos Híbridos*.

De esta manera, gracias a la integración de los aportes de la antropología, la sociología y la investigación educativa, se configura la idea de Ecosistemas Educativos Híbridos para reconocer la materialidad híbrida de nuestras sociedades actuales, la cual está constituida por espacios de diversas naturalezas, que se intersectan, confluyen y se integran de manera armónica y transparente.

Cada uno de los mencionados espacios tiene asociado tecnologías características, aunque no excluyentes de otros espacios (ver Figura 4). Por ejemplo, los teléfonos inteligentes corresponden a una tecnología asociada directamente a lo digital, no obstante, también poseen una materialidad física (e.g. el aparato, la batería, la pantalla, los circuitos) y, dependiendo de sus características, también puede ser parte de una materialidad de realidad aumentada para jugar Pokémon GO. Lo importante está en reconocer la diversidad de espacios convergiendo y el uso educativo que se les puede dar en nuestros Ecosistemas Educativos Híbridos.

## Ecosistemas Educativos Híbridos



Cualquier recurso educativo (incluso mapas curriculares, materiales de curso, libros de estudio, streaming de videos, aplicaciones multimedia, podcasts y cualquier material que haya sido diseñado para la enseñanza y el aprendizaje) que esté plenamente disponible para ser usado por educadores y estudiantes, sin que haya necesidad de pagar regalías o derechos de licencia (BUTCHER, KANWAR; UVALIC-TRUMBIC, 2015, p. 5).

287

Un ejemplo es la Comunidad GeoGebra, la cual gestiona un repositorio de REA que cuenta con más de un millón de recursos<sup>48</sup>, los cuales están elaborados prácticamente en su totalidad por los miembros de la Comunidad GeoGebra, es decir, profesores, estudiantes, investigadores, entusiastas en el uso del software, etc.

Este repositorio en general y la manera comunitaria de crear los REA en particular, es un ejemplo de la forma en que la sociedad red se pone en funcionamiento para construir socialmente una tecnología de manera no oficial.

## CONSIDERACIONES EPISTÉMICAS DE LOS ECOSISTEMAS EDUCATIVOS HÍBRIDOS: MATEMÁTICA EDUCATIVA

En la presente sección abordamos la segunda pregunta planteada en la sección 1, referida a ¿qué matemáticas y cómo se aprenden éstas en la era digital?

Si bien Cobo y Moravec (2011) señalan la importancia de hacer énfasis en el *cómo* aprender sobre el *qué* aprender, desde la investigación disciplinar, en este caso desde la matemática educativa, el *qué* aprender -las matemáticas- está en el centro de la investigación.

Particularmente, el caso que nos ocupa, la educación de la geometría, es una de las áreas de la matemática educativa en que más se han investigado los efectos de la tecnología digital:

La tecnología [digital] en la educación de la geometría se ha convertido en la corriente principal [...] Esto en

<sup>48</sup> La lectora o el lector puede visitar el repositorio de la Comunidad GeoGebra, llamado *Recursos para el aula*, en el sitio [www.geogebra.org/materials](http://www.geogebra.org/materials), donde podrá encontrar REA elaborados con GeoGebra en más de 20 idiomas diferentes.



parte se debe a la manera en que algunas tecnologías, como los ambientes de geometría dinámica, cambian los objetos y los discursos geométricos de manera bastante significativa, en comparación con las aproximaciones con lápiz y papel (SINCLAIR *et al.*, 2016, p. 704).

Además, los mencionados ambientes de geometría dinámica - AGD y el de GeoGebra en particular, son buenos representantes de una tecnología digital que ha sido construida en el ámbito no oficial, por lo cual se presenta como una tecnología propicia para indagar el estado de la investigación en matemática educativa incorporando tecnología digital.

Con esta idea en mente, a continuación se presenta el resultado de una revisión de literatura para entender la manera en que se está utilizando la tecnología digital en la investigación en matemática educativa, focalizando hacia las que emplean AGD. Al respecto, se identificaron tres tendencias en la investigación.

## ¿CON O SIN TECNOLOGÍA DIGITAL?

Este es el modelo tradicional de investigación sobre los efectos de la tecnología digital en matemática educativa. Son muy abundantes las investigaciones que realizan un comparativo entre realizar tareas con papel y lápiz, o realizarlas en AGD. Algunos ejemplos de esta tendencia en la investigación en matemática educativa son Stylianides y Stylianides (2005), Iranzo y Fortuny (2009), Koyuncu y otros (2015), Hitt y otros (2017a, b).

Esta tendencia de investigación y su pregunta motivadora (¿con o sin tecnología digital?), se corresponde con el paradigma tradicional de investigación antropológica sobre la relación entre la tecnología y la cultura, en la cual se concibe a la tecnología como un periférico de las

sociedades, el cual podría estar o no presente en nuestras sociedades sin mayores consecuencias.

## AMPLIACIÓN DE LO FÍSICO A LO DIGITAL

La segunda tendencia está marcada por el interés en extender los resultados y conclusiones de la investigación en matemática educativa centrada en los espacios físicos, hacia los espacios digitales. Esta ampliación se ha realizado tanto en la elaboración de diseños didácticos y de recursos, que pueden estar basados o no en la investigación; y en las explicaciones teóricas de los fenómenos asociados a la presencia de la tecnología digital al enseñar o aprender matemáticas.

Al respecto, Sinclair y Yerushalmy (2016) reflexionan sobre este tema en el campo de la investigación en matemática educativa:

En términos teóricos, hemos notado una tendencia de los investigadores a combinar dos o más perspectivas teóricas para tener en cuenta adecuadamente sus contextos de investigación. A veces, las teorías generales del aprendizaje deben combinarse con teorías que proporcionan un enfoque más centrado en el uso de las herramientas y su papel en la enseñanza y el aprendizaje. Vemos la necesidad de articular mejor las teorías del aprendizaje con las teorías del uso de herramientas, que actualmente se hace, en su mayor parte, combinando enfoques (SINCLAIR; YERUSHALMY, 2016, p. 264).

Así se da muestra de la necesidad de abordar las investigaciones que involucren a la tecnología digital en los fenómenos didácticos ligados a las matemáticas, atendiendo a las explicaciones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje, y a las que se centran en el uso de la tecnología digital, y cómo influye esta en la enseñanza y el aprendizaje.

Esta tendencia de investigación se corresponde con una transición entre los paradigmas tradicional y moderno en la investigación antropológica sobre la relación entre la tecnología y la cultura. Esta transición se caracteriza por comenzar a reconocer la necesidad de no trivializar el rol de la tecnología en su relación constituyente con la cultura y, en consecuencia, al estar presente en fenómenos educativos.

## ÉNFASIS EPISTÉMICO: LO ESPECÍFICO DE LO DIGITAL EN EDUCACIÓN

La tercera tendencia se caracteriza por el interés en indagar lo específico de aprender o de enseñar matemáticas en espacios digitales. Ya no tiene cabida la pregunta ¿con o sin tecnología digital?, y se van dejando atrás los intentos por extender las explicaciones sobre el uso de tecnología análoga (de espacios físicos) hacia la tecnología digital. Aquí el foco de atención está en reconocer la existencia de un cambio en la manera de interactuar con las matemáticas cuando se emplea tecnología digital.

A lo específico o propio de aprender o enseñar matemáticas con tecnología digital, Artigue (2002, p. 248) lo denomina el *valor epistémico* de las técnicas instrumentadas, “el cual contribuye al entendimiento de los objetos en los que involucra” y, por lo tanto, convertirse en “una fuente de preguntas sobre el conocimiento matemático”. Es importante notar que Artigue reconoce que las técnicas instrumentadas también tienen un *valor pragmático*, referido a “su potencial productivo (eficiencia, costo, campo de validez)” (ARTIGUE, 2002, p. 248).

A modo de ejemplo, algunas investigaciones que se enfocan en el valor epistémico de las técnicas instrumentadas por AGD -aunque no necesariamente lo declaren como parte de su marco teórico- son: la de

Arzarelo, Olivero y Robutti (2002), donde se enfocan en las tipologías cognitivas del uso del arrastre por estudiantes al resolver problemas geométricos; la de Laborde (2002), que investiga diferentes tipos de tareas al estudiar geometría, donde identifica que en tales ambientes emergen nuevos tipos de tareas, las cuales únicamente tienen sentido y significado en el AGD, es decir, son tareas que únicamente se pueden resolver en un espacio de tales características; la de Cantoral y Montiel (2014), quienes estudian funciones mediante un tratamiento gráfico, el cual se realiza a través de tres acercamientos: tabulación, transformaciones y operaciones gráficas; la de Sinclair y Yurita (2008), quienes estudian familias de cuadriláteros mediante la examinación de su comportamiento y lo que queda invariante al aplicar el arrastre.

Un aspecto a destacar de esta tendencia es que, así como lo propuso Artigue (2002), en la actualidad la investigación tiene el desafío de buscar el equilibrio entre los valores pragmático y epistémico al involucrar la tecnología digital, ya que ambos valores son inseparables (CHEVALLARD, 1992). Además, Artigue (2009) advierte que esta búsqueda de equilibrio no es una labor fácil y que con frecuencia encuentra resistencia debido a que:

Las tecnologías digitales hierven sobre el equilibrio tradicional entre el valor pragmático y epistémico de las técnicas que se construyeron dentro de una cultura de papel y lápiz. Una razón esencial para ello es la forma en que los sistemas educativos tienden a adaptarse a las tecnologías digitales, sin reconsiderar sus valores fundamentales, tratando a la tecnología [digital] como un simple adyuvante pedagógico [...]. Esto requiere tareas y situaciones que no sean una simple adaptación de las tareas de papel y lápiz, a menudo tareas sin equivalente en el entorno del papel y el lápiz, por lo tanto, las tareas no son tan fáciles de diseñar cuando ingresas al mundo tecnológico [digital] con tu cultura de papel y lápiz (ARTIGUE, 2009, pp. 467 y 468).

En la última frase de la cita, Artigue propone que la valoración de la tecnología digital en la educación es un asunto cultural, o de manera

más precisa, un diálogo entre la cultura tradicional de lápiz y papel con la cultura digital. De aquí que sea natural establecer la relación entre el énfasis epistémico con el paradigma moderno de investigación antropológica sobre el vínculo tecnología-cultura, el cual asume a la tecnología (digital) como una construcción social, cultural y simbólica en nuestras sociedades modernas y complejas. Dicho de otro modo, la tecnología es parte de la cultura y, a su vez, de la sociedad.

## ECOSISTEMA EDUCATIVO HÍBRIDO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Así como se comentó en la sección 3, el presente trabajo se posiciona en el paradigma moderno de investigación antropológica, por lo que es relevante para el propósito de responder a la segunda pregunta planteada en la sección 1 relativa a qué matemáticas y cómo se aprenden éstas en la era digital, abordar la propuesta de enfatizar en la valoración epistémica de la tecnología digital al estudiar matemáticas, considerada en la sección anterior. No obstante, a la luz de la propuesta de los Ecosistemas Educativos Híbridos, es importante reconocer que en estos ecosistemas intervienen otros espacios además del físico y digital, como la realidad aumentada o el video 360.

De esta manera, es sensato preguntarse si es posible explorar el valor epistémico en otras tecnologías diferentes a las digitales y, en definitiva, valorar epistémicamente el uso de las tecnologías de todos los espacios que configuran los Ecosistemas Educativos Híbridos.



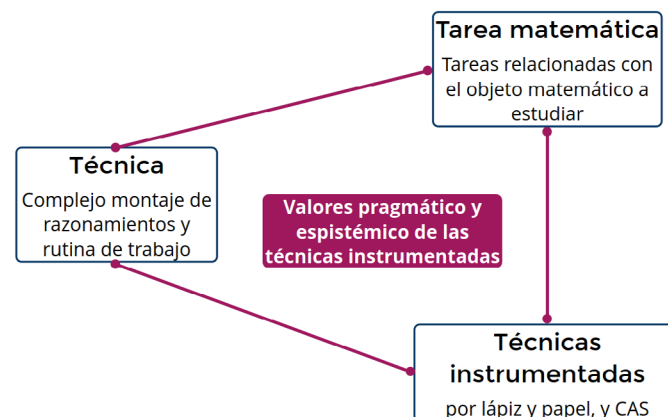
## VALORES EPISTÉMICO Y PRAGMÁTICO DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL

Para abordar esta cuestión es necesario remontarse a la propuesta original de Artigue (2002), quien se refiere a los valores epistémico y pragmático exclusivamente de las técnicas matemáticas, donde la técnica es un constructo heredado de la teoría antropológica de lo didáctico - TAD, aunque ampliada por la autora de “una manera de resolver una tarea” a un “complejo montaje de razonamientos y rutina de trabajo” (ARTIGUE, 2002, p. 248). En cuanto a las técnicas analizadas en tal investigación, la autora declara dos tipos: técnicas de lápiz y papel y técnicas instrumentadas<sup>49</sup> (ver Figura 5).

Es interesante notar que cada vez que Artigue habla del valor epistémico o pragmático de una técnica, siempre se está refiriendo a una técnica junto con la tecnología usada en la tarea matemática, ya sea lápiz y papel o tecnología digital. De lo cual se puede inferir la relación indisoluble entre la técnica y la tecnología utilizada en la tarea matemática. Esta inferencia cobra más sentido cuando se examinan las bases de la distinción entre el valor pragmático y el epistémico, la cual es original de la ergonomía cognitiva (VÉRILLON; RABARDEL, 1995) y está referido al esquema de uso de la tecnología. De esta manera, los valores *epistémico y pragmático de la técnica* es una articulación entre constructos de la ergonomía cognitiva y la TAD (ARTIGUE, 2007), articulación que se enmarca en la propuesta teórica conocida como *aproximación instrumental* (ARTIGUE, 2002).

<sup>49</sup> Artigue (2002) se refiere a las *técnicas instrumentadas* para hablar de las *técnicas instrumentadas por tecnologías computacionales*. Por lo tanto, cuando en este escrito aparezca la frase técnica instrumentada, la lectora o el lector puede asumir -sin pérdida de precisión- que se está hablando de técnicas al usar tecnología digital. Aclaración necesaria para mantener la coherencia de términos usados en el presente capítulo.

Figura 5 - Valores pragmático y epistémico de las técnicas instrumentadas



Fuente: Elaborado con base en Artigue (2002).

Sumado a esto, el uso de estos términos en la literatura especializada es flexible, añadiendo otros en lugar de referirse a la técnica. Por ejemplo, en Sinclair *et al.* (2009), respecto del desarrollo de tareas en un AGD y el uso del arrastre, hablan de los valores epistémico y pragmático de las *prácticas instrumentadas*, de las *acciones*, de la *herramienta* y de la *práctica*. En Monaghan y Trouche (2016), respecto del diseño de tareas con herramientas digitales, se refieren al *valor epistémico de la tarea*, aunque necesitan hacer la aclaración al pie de página, de que tal frase se puede considerar como una abreviación del *valor epistémico de la técnica requerida para resolver la tarea*. Por su parte, Artigue (2009), haciendo una reflexión de su investigación del 2002, se refiere al *poder epistémico y pragmático de la tecnología*.

Considerando el uso indisoluble entre técnica y tecnología, el origen de la distinción entre los valores epistémico y pragmático al usar tecnologías, y a la flexibilidad en el uso del término referido a la *técnica* en la literatura especializada, es posible reconocer que el constructo *valores epistémico y pragmático de la técnica* se debe al posicionamiento teórico y los intereses de Artigue, quien tenía el

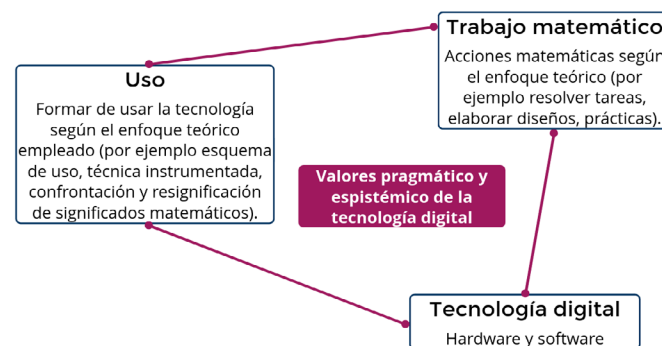
objetivo de hacerse con herramientas teóricas que le permitieran dar cuenta del rol de los instrumentos y del trabajo técnico, para lo cual declara que “las aproximaciones antropológicas y socioculturales parecen ser más sensibles al rol que juegan los instrumentos en el trabajo matemático, y para tomar en cuenta de manera apropiada el rol del ‘trabajo técnico’” (ARTIGUE, 2009, p. 47). De aquí el marcado acento en la técnica.

Bajo estas consideraciones, se puede ampliar el constructo *técnica instrumentada al uso -en sentido amplio- de la tecnología digital* al desarrollar un trabajo matemático (e.g. resolver tareas, solucionar problemas, elaborar diseños). El uso de la tecnología digital se verá, entonces, permeado por la teoría empleada en la investigación correspondiente, pudiendo traducirse en el estudio del artefacto si se trabaja con la ergonomía cognitiva, en el estudio de técnicas instrumentadas si se trabaja con la aproximación instrumental, en el estudio de la confrontación y resignificación de significados matemáticos con el uso de tecnología digital si se trabaja con la Socioepistemología (RUBIO-PIZZORNO, 2018)<sup>50</sup>, entre otros.

Así también, se puede recurrir a la economía de lenguaje para hablar simplemente de los *valores epistémico y pragmático de la tecnología digital* (ver Figura 6), entendiendo que esta valoración se podrá realizar siempre que haya un uso matemático de la tecnología. Es decir, la tecnología digital *per se* no tiene una valoración epistémica o pragmática, sino que esta valoración existe únicamente cuando se realiza un trabajo matemático con la tecnología digital. Como dice Artigue (2002, p. 268), “el valor epistémico [y pragmático], por supuesto, no es algo que pueda definirse de manera absoluta; este depende de los contextos”.

50 Para esta cita en particular se recomienda específicamente la sección 2.4.3. *Confrontación de significados matemáticos* (RUBIO-PIZZORNO, 2018, pp. 127 - 133).

Figura 6 - Valores pragmático y epistémico de la tecnología digital



Fuente: Elaboración propia.

## VALORES EPISTÉMICO Y PRAGMÁTICO DE LAS TECNOLOGÍAS

Luego de reconocer la posibilidad de valorar epistémica y pragmáticamente a la tecnología digital, queda pendiente explorar la posibilidad de ampliar esta valoración a las tecnologías representativas de otros espacios, como el físico, la realidad aumentada, etc., es decir, de los espacios que constituyen los Ecosistemas Educativos Híbridos.

En primer lugar, es necesario recordar que, en la propuesta original sobre los valores epistémico y pragmático de las técnicas, Artigue (2002) reconoce esta valoración para el lápiz y papel (tecnología del espacio físico) y para el CAS (tecnología digital). Por lo tanto, se reconoce la valoración, no sólo de la tecnología digital, sino también de las correspondientes a espacios físicos, como el lápiz y papel.

Por otra parte, la relación entre las matemáticas y la tecnología tiene larga data. Moreno-Armella, Hegedus y Kaput (2008) realizan una revisión histórica sobre esta relación, la cual proponen que es una

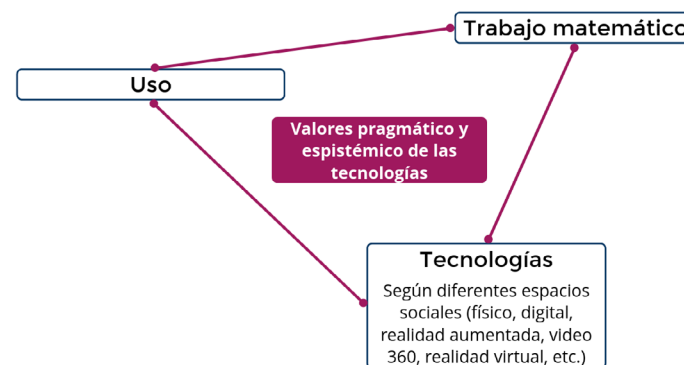
mutuamente constituyente y que se ha dado desde los orígenes de las matemáticas hasta nuestros tiempos, es decir, desde los huesos con marcas realizadas hace 30.000 años a.C. encontrados en Moravia, hasta las tecnologías más recientes. Con base en la revisión histórica, los autores describen cinco etapas de la relación entre las matemáticas y la tecnología, las cuales corresponden a las etapas estática inerte, estática cinestésica/estética, estática computacional, dinámica discreta y dinámica continua.

Aunando la propuesta de Artigue (2002) y la de Moreno-Armella *et al.* (2008) es posible reconocer que las matemáticas y la tecnología siempre han estado relacionadas, desde las muescas en los huesos para contar, hasta la creación de modelos matemáticos en realidad aumentada o virtual, pasando por el ábaco, la calculadora, y el lápiz y papel. Esto nos permite admitir que las tecnologías usadas en cada etapa han servido a un propósito matemático, es decir, para hacer algo matemáticamente. De aquí que podamos proponer que toda tecnología -no importando a qué espacio represente (físico, digital, realidad aumentada, etc.)-, que sea usada para desarrollar un trabajo matemático, tiene sus valores epistémico y pragmático (ver Figura 7). Estos últimos corresponden a:

- **Valor epistémico de las tecnologías:** formas en que las tecnologías ayudan a comprender el objeto matemático y genera preguntas sobre este, al ser usada para desarrollar un trabajo matemático específico.
- **Valor pragmático de las tecnologías:** potencial productivo de las tecnologías, es decir, eficiencia, costo y campo de validez.



Figura 7 - Valores pragmático y epistémico de las tecnologías



Fuente: Elaboración propia.

De esta manera, hemos podido dar respuesta a las preguntas motivadoras de este estudio, reconociendo la existencia de los Ecosistemas Educativos Híbridos, y la valoración epistémica y pragmática de las tecnologías que representan cada uno de los espacios que constituyen tales ecosistemas, al ser usadas en un trabajo matemático. En el esquema de la Figura 7 se sintetizan los aportes de las explicaciones antropológicas, sociológicas, de investigación educativa y de la matemática educativa, las cuales se han articulado mediante el desarrollo autónomo de la última y la recontextualización de las primeras, con el objetivo de construir conocimiento, tal como planteó en la sección 2.

A modo de operacionalizar esta propuesta, a continuación, se presentan los aspectos a considerar para aprovechar el potencial de los Ecosistemas Educativos Híbridos, ya sea para elaborar diseños educativos, para analizar la implementación de diseños, en la investigación, etc., siempre desde un enfoque teórico específico de la matemática educativa:

- I. *Explorar las tecnologías disponibles*, considerando los diferentes espacios sociales.
- II. *Posicionarse en un enfoque teórico específico* que permitirá determinar a qué se refiere en particular el trabajo matemático y el uso de las tecnologías para cada caso.
- III. *Indagar en los valores epistémico y pragmático de las tecnologías* características de los diferentes espacios, en el desarrollo del trabajo matemático específico.
- IV. *Explorar la manera de usar coordinadamente las diferentes tecnologías* para un mejor aprovechamiento de sus valores pragmático y epistémico en desarrollo del trabajo matemático.

En la siguiente sección se muestra, a modo de ejemplo, la elaboración de un diseño educativo siguiendo las pautas de la operacionalización de los Ecosistemas Educativos Híbridos en la investigación en matemática educativa.

## UN EJEMPLO A MODO DE CONCLUSIÓN

En esta sección se presenta un ejemplo para ilustrar el reconocimiento y aprovechamiento del potencial de los Ecosistemas Educativos Híbridos en la matemática educativa, específicamente con el uso de GeoGebra. Se utilizan los cuatro puntos de operacionalización de la propuesta de los Ecosistemas Educativos Híbridos recién declarados para analizar el ejemplo. Este corresponde al diseño de un REA construido en un Libro GeoGebra articulando tecnologías de los espacios físico y digital, para el estudio de la conservación de áreas. Este REA fue diseñado por Álvarez Zamorano (2018) como parte del *Seminario de Integración Digital a la Práctica del Docente de Matemáticas* reportado en el trabajo de Rubio-Pizzorno (2018).

Cabe destacar que, para proceder con la operacionalización de los Ecosistemas Educativos Híbridos, primero se atendió a un contenido curricular, ya que el REA se diseñó para ser implementado en condiciones educativas reales, específicamente con un grupo de estudiantes de quinto de primaria de una escuela de México.

En el Seminario se estaba trabajando con base a la propuesta teórica de la confrontación y resignificación de los significados matemáticos (ver nota al pie número 10). En consecuencia, el trabajo matemático estaba determinado por las prácticas matemáticas realizadas con el uso de las tecnologías, para confrontar los significados asociados a la conservación de área.

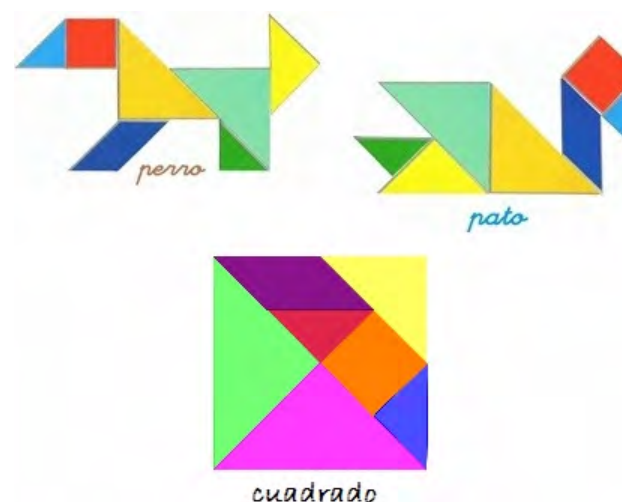
Dada la postura teórica, se buscó significados escolares asociados a la conservación de áreas para ser confrontados, los cuales se tomaron de las ideas reportadas por Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011), quienes reportan que los niños tienden a pensar que mientras mayor sea el área de las figuras estudiadas, mayor debe ser su perímetro; y que sólo las figuras congruentes tienen igual área.

Con estas dos ideas a confrontar (área-perímetro y congruencia-área), se exploraron las tecnologías disponibles en el ecosistema educativo en el cual interactúa la profesora Alvarez Zamorano y sus estudiantes, de tal manera que pudieran servir a este propósito, es decir, que tuvieran valores epistémico y pragmático que permitiera confrontar estas ideas.

En primer lugar, se consideró el uso del tangram de madera para comparar figuras con igual área, pero con diferentes perímetros, y así confrontar la relación área-perímetro ya descrita. La actividad diseñada consiste en pedirle a los estudiantes que armen diferentes figuras (perro, pato) usando todas las piezas del tangram de madera (ver Figura 8), para que luego pidan el perímetro de cada figura y lo comparen con la otra. Con esta actividad se pretende que los estudiantes puedan

identificar figuras que tienen distintos perímetros y suponer que la figura con mayor perímetro también tiene mayor área. Sin embargo, al reflexionar que ambas figuras se armaron con exactamente las mismas piezas, se confronta la idea de que a mayor perímetro mayor área, y también se espera que puedan concluir que figuras que tienen igual área pueden tener diferentes perímetros.

**Figura 8 - Diferentes configuraciones del tangram**

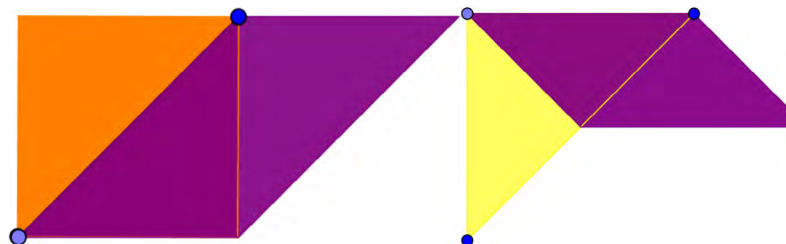


Fuente: Alvarez Zamorano (2018, p. 41).

En cuanto a la relación congruencia-área, el tangram de madera permite confrontar la idea de que sólo los polígonos congruentes tienen igual área a través de la comparación por superposición de las piezas. Por ejemplo, se puede comparar la superficie del cuadrado, el triángulo amarillo y el romboide (morado), mediante la superposición de las piezas con una configuración específica (como se muestra en la Figura 9). Al realizar esta comparación, se puede observar que el cuadrado y el romboide tienen una superficie común y que las superficies no comunes son triángulos congruentes. Este trabajo matemático de comparación

por superposición se puede realizar también con el triángulo amarillo y el romboide, obteniendo el mismo resultado. Ello permite confrontar la idea de que sólo los polígonos congruentes tienen la misma área.

**Figura 9 - Comparación de áreas mediante superposición de las piezas**

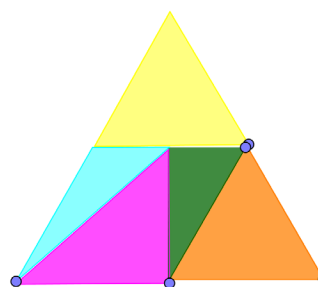


Fuente: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018, p. 4.2).

Sin embargo, esta estrategia únicamente involucra la comparación del área de polígonos de diferente tipo, es decir, no permite confrontar esta idea con polígonos de igual tipo. Debido a esta situación, se exploró la posibilidad de usar el AGD de GeoGebra para aprovechar la facilidad con la que se pueden realizar construcciones geométricas precisas.

De esta manera, se elaboró un tangram en AGD de GeoGebra constituido únicamente por triángulos (Figura 10), donde algunos de ellos tienen la misma área.

**Figura 10 - Tangram triangular**

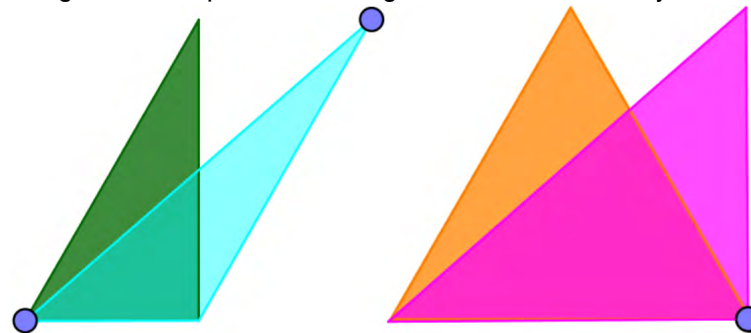


Fuente: Alvarez Zamorano (2018, p. 4.4).



Este tangram permite comparar el área de triángulos diferentes a través de superposición de triángulos, fijando la base y luego analizando si sus alturas respecto de tal base son de la misma longitud (ver Figura 11).

**Figura 11 - Comparación de triángulos a través de su base y altura**



Fuente: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018, p. 4.4).

Usando el tangram triangular de esta manera, los estudiantes pueden establecer que triángulos no congruentes pueden tener la misma área. Sumando este resultado al obtenido con el tangram de madera, es posible confrontar la idea congruencia-área, es decir, que sólo los polígonos congruentes tienen la misma área.

Finalmente, todas las actividades recién presentadas se incorporaron a un Libro GeoGebra, para establecer una secuencia educativa que aprovechara los valores epistémico y pragmático de cada tecnología, así como el uso coordinado de estas.

En primer lugar, se disponen de las actividades con el tangram de madera, dada la experiencia de los estudiantes de quinto de primaria con los materiales manipulables. Luego se proponen actividades de medición de área y perímetro del tangram y sus piezas, y a continuación se propone la actividad correspondiente a la Figura 8. Para transitar de las actividades con el tangram de madera hacia el uso del AGD de

GeoGebra, se dispone de una actividad para armar las figuras del pato y el perro en un tangram digital para realizar la misma comparación de la relación entre área y perímetro, pero ahora con una tecnología digital. Con el mismo tangram digital también se proponen actividades para comparar el área y el perímetro de las piezas del tangram.

A continuación, se introduce la comparación de triángulos mediante su base y altura, se dispone de una actividad para relacionar el área y el perímetro de triángulos, considerando ambos elementos. Recién en esta parte se introduce el tangram triangular creado con GeoGebra (ver Figura 10), para seguir confrontando la relación congruencia-área.

Además, el Libro GeoGebra se presenta como un ambiente digital para organizar y estructurar las actividades a desarrollar por los estudiantes en ambos espacios (físico y digital) con el uso de diferentes tecnologías (tangram de madera, lápiz y papel, AGD de GeoGebra, preguntas de opción múltiple y de respuesta abierta del Libro GeoGebra, así como la exploración de objetos físicos cotidianos de un aula).

De esta manera, se abordaron las dos ideas sobre conservación de área a confrontar, referidas a la relación área-perímetro y congruencia-área, usando el planteamiento de los Ecosistemas Educativos Híbridos en la elaboración de un REA. En el Cuadro 1 se expone una síntesis de los elementos involucrados en el planteamiento de los Ecosistemas Educativos Híbridos para la noción de conservación de área recién desarrollada, considerando los siguientes elementos teóricos con base en la confrontación de significados matemáticos (RUBIO-PIZZORNO, 2018).

- **Uso de las tecnologías:** confrontación y resignificación de significados asociados a la conservación de área, con el uso del tangram y del AGD de GeoGebra.

- **Trabajo matemático:** prácticas matemáticas de comparación por superposición o según la base y altura de triángulos.

**Tabla 1 - Análisis de los Ecosistemas Educativos Híbridos en Alvarez Zamorano (2018)**

Espacios	Tecnologías	Valor epistémico	Valor pragmático
<i>Físico</i>	<i>Tangram de madera</i>	<i>Comparación por superposición de las superficies de las piezas para confrontar la relación entre área y perímetro.</i>	<i>Facilidad para manipular sus piezas.</i>
<i>Digital</i>	<i>Tangram triangular y digital (GeoGebra)</i>	<i>Comparación de triángulos usando la técnica de la altura e igual base, para confrontar la relación congruencia-área.</i>	<i>Facilidad para realizar construcciones geométricas precisas.</i>

Fuente: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018).

## CONCLUSIONES

Desde el paradigma antropológico moderno de la relación entre la cultura y la tecnología, se consideran a las tecnologías como una construcción social, lo cual nos permite reconocer que son parte natural de nuestros ecosistemas educativos. Así también, desde el aporte de la sociología y la investigación educativa ha sido posible reconocer que, en la actualidad, la materialidad social es una hibridación entre espacios de diferentes naturalezas. De ahí que reconocer la existencia, la validez y el potencial de los Ecosistemas Educativos Híbridos sea consecuencia de abordar la pregunta respecto de cómo se articula la sociedad para construir conocimiento aprovechando las tecnologías.

Los Ecosistemas Educativos Híbridos también representan un espacio de encuentro entre los ámbitos oficial y no oficial, por ejemplo, en una sala de clases, donde la profesora o el profesor realiza su clase para abordar los contenidos curriculares (oficial), pero sobre todo atendiendo a las necesidades educativas que manifiestan sus estudiantes (no oficial). Al respecto, es un propósito de los autores de este capítulo destacar el rol que está jugando el ámbito no oficial en los Ecosistemas Educativos Híbridos, representado por tecnologías libres y recursos abiertos, es decir, por los comunes. La preponderancia que han tomado los comunes en el ámbito educativo se refleja en el establecimiento de comunidades educativas abiertas (RUBIO-PIZZORNO, 2020), quienes generan productos como tecnologías libres (e.g. GeoGebra) y REA, construidos abierta y socialmente, para atender las necesidades educativas personales y comunitarias, sin necesidad de depender del ámbito oficial.

De aquí que la importancia de la propuesta de los Ecosistemas Educativos Híbridos vaya más allá de sólo considerar el aspecto tecnológico. En términos docentes, la importancia radica en que los y las profesoras tengan la oportunidad de atender las necesidades e inquietudes educativas de sus estudiantes, desde una posición de autonomía y empoderamiento docente, que se puede complementar con la obligatoria atención a las normas educativas oficiales. Y esto es posible gracias a que, en primer lugar, ya estamos en condiciones de reconocer la existencia de diferentes espacios sociales con sus respectivas tecnologías, las cuales podemos aprovechar -según su disponibilidad- para nuestros propósitos educativos; en segundo lugar, ya existe un gran acervo de recursos educativos reunidos en múltiples repositorios de REA, donde los profesores pueden buscar y usar los que se ajusten a sus necesidades; y en tercer lugar, existen las condiciones técnicas para que los profesores puedan crear y compartir de manera abierta sus propios recursos educativos.

En términos disciplinares, la propuesta desarrollada en este capítulo representa la oportunidad de aprovechar las tecnologías con un sentido educativo y didáctico más consciente, es decir, aprovecharlas pragmática y epistémicamente, lo cual aborda el cuestionamiento respecto de qué matemáticas y cómo se aprende la en la era digital. Ya somos conscientes de la variedad de espacios sociales y sus tecnologías, los cuales se puede aprovechar en la educación. Además, ya contamos con las herramientas para valorar tales tecnologías con un sentido educativo y didáctico, aprovechando su potencial de uso y las formas en que ayudan a comprender un objeto o noción matemática.

Esto da cuenta de una nueva tendencia de investigación con tecnologías en matemática educativa, que nos propone cuestionarnos sobre los valores pragmático y epistémico de todas las tecnologías.

## REFERENCIAS

ALVAREZ ZAMORANO, M. A. *Conservación de área [Libro GeoGebra]*, 2018. Recuperado de: <https://mat.geogebra.org/m/MUh7Pzz8>

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2002, 7 (3), pp. 245–274. doi: 10.1023/A:1022103903080.

ARTIGUE, M. Digital technologies: A window on theoretical issues in mathematics education. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for research in mathematics education* (Vol. 5, 2007, pp. 68–82). Larnaca, Chipre: University of Cyprus and ERME. Recuperado de: <https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/plenaries.pdf>

ARTIGUE, M. The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. En B. R. Hodgson, A. Kuzniak y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, 2009 (pp. 463–475). Cham: Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0\\_23](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23)



ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D., Y ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 2002, 34 (3), 66–72. doi: 10.1007/BF02655708

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 9 (1), 2020, 10-25. ISSN: 2316-8889. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p43-58

BUTCHER, N., KANWAR, A. Y UVALIC-TRUMBIC, S. *Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA)*. Francia: UNESCO, 2015. de <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000232986>.

CABRI. Cabri Express terms of use. 2017. Recuperado de: <https://cabri.com/en/>.

CANTORAL, R.; MONTIEL, G. *Precálculo, un enfoque visual*. México: Pearson Educación, 2014.

CASTELLS, M. La Era de la Información. Economía, Sociedad y Cultura: La Sociedad Red. Volumen I. Siglo XXI, Estado de México, México, 1999.

CCD Radio (Sin fecha). *Inmersión: RV, RA, RM [podcast]*. En Glitch. Recuperado de: <https://soundcloud.com/ccd-radio/glitch-2>.

CENTRO DE CULTURA DIGITAL. *Cada tecnología inmersiva se relaciona con el movimiento de distinta manera: en video 360 al girar la cabeza movemos la cámara; en #VR podemos desplazarnos en el espacio de una habitación; y en la mixta la libertad de movimiento se abre hacia espacios más extensos. #LabInmersión [twitt]*. 28 de febrero de 2018. Recuperado de: [twitter.com/CCDmx/status/968947688195743749](https://twitter.com/CCDmx/status/968947688195743749).

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. En B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot* (pp. 183–203). Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

COBO, C.; MORAVEC, J. W. *Aprendizaje invisible. Hacia una nueva ecología de la educación*. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 2011.

COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA. S06 Construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções [Vídeo]. *Coloquio GeoGebra de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana – Año 1*, sesión 6, 2019. Recuperado de: [https://youtu.be/ufpBK\\_CzDUQ](https://youtu.be/ufpBK_CzDUQ).

CONTRERAS, P. *Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica*. Editorial Gedisa S. A., Barcelona, 2033.

FREIMAN, V. Types of Technology in Mathematics Education. En Stephen Lerman (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. 2014, pp. 623–629. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8.

GARCÍA GAGO, S.; OBREGÓN, J.; ROBAYO, C.; SPITIA, N.; ALMARAZ FUNES, J.; BRAVO, L. *El software libre en la radio. Migrar la tecnología*. Red de Radios Comunitarias y Software Libre y la Asociación Latinoamericana de Educación y Comunicación Popular (ALER), 2020. Recuperado de: <https://liberaturadio.org/manual-el-software-libre-en-la-radio/>.

HITT, F.; SABOYA, M.; CORTÉS, C. Task Design in a Paper and Pencil and Technological Environment to Promote Inclusive Learning: An Example with Polygonal Numbers. En: Aldon Gilles; Fernando Hitt; Luciana Bazzini y Uwe Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology. Advances in Mathematics Education*, 2017a, pp. 57–74. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-51380-5\_4.

HITT, F.; SABOYA, M.; ZAVALA, C. C. Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, 2017b, 94 (1), pp. 97–116. doi: 10.1007/s10649-016-9717-4.

IRANZO, N.; FORTUNY, J. M. La influencia conjunta del uso del GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 2009, 27 (3), pp. 433–446.

KOSPENTARIS, G.; SPYROU, P.; LAPPAS, D. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 2011, 77 (1), pp. 105–127. doi: 10.1007/s10649-011-9303-8.

KOYUNCU, I.; AKYUZ, D.; CAKIROGLU, E. Investigation of plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in the technology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2015, 13 (4), pp. 837–862. doi: 10.1007/s10763-014-9510-8.

LABORDE, C. Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2002, 6 (3), pp. 283–317. doi: 10.1023/A:1013309728825.

LERMAN, S. The social turn in mathematics education research. En Joe Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning. International Perspectives on Mathematics Education*, 2000, pp. 19–44. Londres, United Kingdom: Ablex.

MONAGHAN, John; TROUCHE, Luc. Tasks and Digital Tools. En: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (eds.) *Tools and Mathematics*. Instruments for learning, 2016, p. 391 - 416.

MORENO-ARMELLA, L.; HEGEDUS, S. J.; KAPUT, J. J. From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 2008, 68 (2), 99–111. DOI: 10.1007/s10649-008-9116-6.

PINCH, T. La construcción social de la tecnología: una revisión. En: SANTOS, María Josefa; DÍAZ CRUZ, Rodrigo (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, 2015. capítulo 2, pp. 18–37. Fondo de Cultura Económica, México.

POKÉMON. Recuperado de: [www.pokemongo.com](http://www.pokemongo.com).

ROWE, J. *Our Common Wealth. Hidden Economy That Makes Everything Else Work*. Berrett-Koehler Publishers: San Francisco, Estados Unidos, 2013.

RUBIO-PIZZORNO, S. *Integración digital a la práctica del docente de geometría*. Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), 2018. doi: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1.

RUBIO-PIZZORNO, S. Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista del Instituto GeoGebra de São Paulo*, 9 (1), 10-25. ISSN: 2316-8889, 2020. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p10-25

SANTOS, M. J.; DÍAZ CRUZ, R. Voces plurales en los estudios de tecnología y cultura: una introducción. En: María Josefa Santos y Rodrigo Díaz Cruz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, 2015, capítulo 1, pp. 9–17. Fondo de Cultura Económica, México.

SERRES, M. *Pulgarcita: el mundo cambió tanto que los jóvenes deben reinventar todo: una manera de vivir juntos, instituciones, una manera de ser y de conocer*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica, 2013.

SINCLAIR, N.; BARTOLINI BUSSI, M. G.; DE VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education*, 2016, 48 (5), 691–719. DOI: 10.1007/s11858-016-0796-6.

SINCLAIR, N.; YERUSHALMY, M. Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. En: Ángel Gutiérrez; Gilah C. Leder y Paolo Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 2016 pp. 235–274. SensePublishers, Rotterdam. doi: 10.1007/978-94-6300-561-6\_7

SINCLAIR, N.; YURITA, V. To be or to become: how dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education*, 2008, 10 (2), 135–150. doi: 10.1080/14794800802233670

SORIA GUZMÁN, I. Ética hacker, seguridad y vigilancia. México: Universidad del Claustro de Sor Juana. 2016. ISBN: 987-607-7853-16-9. Recuperado de: <http://ru.iiec.unam.mx/3463/1/EticaHackerSeguridadVigilancia.pdf>.

STACEY, P.; HINCHLIFF PEARSON, S. *Made With Creative Commons*. Copenhagen, Dinamarca: Ctrl+Alt+Delete Books, 2017. Recuperado de: <https://creativecommons.org/made-with-cc/>.

STYLIANIDES, G. J.; STYLIANIDES, A. J. Validation of Solutions of Construction Problems in Dynamic Geometry Environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2005, 10 (1), pp. 31–47. DOI: 10.1007/s10758-004-6999-x.

VÉRILLON, P.; RABARDEL, P. Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 1995, 10 (1): 77–101.